Exercices oral Mines Ponts 2021

Exercice 1

Soit E le $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, et soit v tel que $\forall f \in E, \forall x \in [0,1], v(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f$.
On munit E du produit scalaire :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (u,v) \mapsto \int_0^1 uv$$

1)

Montrer que v est bien un endomorphisme de E puis, montrer qu'il existe un endomorphisme de E, $\tilde{v}$ tel que $\forall f, g \in E, \langle v(f), g\rangle = \langle f, \tilde{v}(g)\rangle$.

- Pour $f \in E$, $v(f)$ est, par le théorème fondamental de l'analyse une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs réelles, donc à fortiori $v(f) \in E$. Ainsi, $v(E) \subset E$.
- Soit $f, g \in E$. Par une intégration par parties, à $v(f)$ de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{aligned}
\langle v(f), g\rangle &= \int_0^1 v(f)g = \int_0^1 \left(\int_0^x f\right) g(x)\mathrm{d}x \\
&= \left[\int_0^x f \int_0^x g\right]_0^1 - \int_0^1 f(x) \int_0^x g\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f(x) \left(\int_0^1 g - \int_0^x g\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f(x)\tilde{v}(g)(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

  Avec $\tilde{v} : E \to E, g(x) \mapsto \int_x^1 g$

2)

Donner les vecteurs propres et valeurs propres de l'endomorphisme $v \circ \tilde{v}$.

Analyse

$(v \circ \tilde{v})(f) = \lambda f$ entraîne, par dérivation : $\tilde{v}(f) = \lambda f'$.
Puis à nouveau par dérivation : $-f = \lambda f''$: (E).
D'où on tire par $f \neq 0$, $\lambda \neq 0$.
De plus, par 1), avec $f = \tilde{v}(g)$:

$$\langle v(\tilde{v}(g)), g\rangle = \langle \tilde{v}(g), \tilde{v}(g)\rangle \geq 0$$

Puis par linéarité du produit scalaire à gauche :

$$\langle v(\tilde{v}(g)), g\rangle = \langle \lambda g, g\rangle = \lambda \langle g, g\rangle\,,$$

d'où $\lambda > 0$.
Enfin, par une résolution de (E) :

$$f(x) = A\cos\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}x\right)$$

Synthèse

On pose f précédente. $(v\circ\tilde{v})(f) = \lambda f$ donc $\lambda f \in \mathrm{Im}\ v$. Ainsi, f est une fonction qui s'annule en 0, donc $A = 0$
Puis $f' \in \mathrm{Im}\ \tilde{v}$, donc f' s'annule en 1.
Donc $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}B\cos\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\right) = 0$, d'où $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$ soit $\sqrt{\dfrac{1}{\lambda}} \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{N}$.
Finalement,

$$\lambda_k = \frac{4}{\pi^2(1+2k)^2}\,, k \in \mathbb{N} \text{ est valeur propre de } v\circ\tilde{v}$$

L'espace propre associé est $\mathrm{Vect}\left(x \to \sin\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}_k x}\right)\right)$, qui est une droite vectorielle.

Exercice 2

Donner un équivalent de la suite de terme général :

$$\int_1^{\infty} e^{-x^n}\mathrm{d}x$$

Premièrement, $\forall x \geq 1, \left|\dfrac{1}{e^{x^n}}\right| \leq \dfrac{1}{e^x}$, intégrable sur $[1, +\infty[$, ce qui justifie la définition de $(u_n)_n$.

Puis par un changement de variable : $t = x^n, \mathrm{d}t = nx^{n-1}\mathrm{d}x = n\dfrac{t}{\sqrt[n]{t}}\mathrm{d}x$:

$$u_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{n}\frac{e^{-t}\sqrt[n]{t}}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}t$$

Or, $t \to e^{-t}t^{\frac{1}{n}-1} \underset{\to}{S} e^{-t}t^{-1}$, fonction continue par morceaux sur $[1, +\infty[$

Puis, $\forall n \geq 1, \forall t \in [1, +\infty[, \left|e^{-t}t^{\frac{1}{n}-1}\right| = e^{-t}t^{\frac{1}{n}-1} \leq e^{-t}$ fonction continue par morceaux, intégrable sur $[1, +\infty[$
Par convergence dominée,

$$u_n \sim \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$$